

Tìm nghiệm tuần hoàn của hệ tuyến tính từng khúc bằng hàm mũ ma trận và phương pháp bắn

Nguyễn Thái Minh Tuấn, Nguyễn Văn Khang

Bộ môn Cơ học Ứng dụng, Viện Cơ khí, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội

E-mail: nguyenthaiminhluan@yahoo.com

Tóm tắt

Hệ tuyến tính từng khúc là một lớp các hệ dao động phi tuyến tiềm ẩn nhiều hiện tượng dao động phong phú. Việc tìm ra lời giải đầy đủ cho bài toán dao động của các hệ này, cũng giống như nhiều bài toán dao động phi tuyến khác, cần đến nhiều phương pháp và thuật toán khác nhau. Tiếp nối những nghiên cứu trước của các tác giả về việc sử dụng hàm mũ ma trận, bài báo này giới thiệu thêm về việc áp dụng phương pháp bắn tìm nghiệm tuần hoàn của hệ tuyến tính từng khúc. Công thức được đề xuất được áp dụng vào tìm các nghiệm tuần hoàn của một hệ tuyến tính từng khúc bất đối xứng. Ngoài ra, bài báo cũng đưa ra hình ảnh lưu vực hút của các nghiệm này bằng cách kết hợp phương pháp bắn với một số thuật toán khác có sử dụng đến lập trình song song.

Từ khóa: phương pháp bắn, hệ tuyến tính từng khúc, hàm mũ ma trận, dao động phi tuyến, lưu vực hút.

1. Mở đầu

Các mô hình tuyến tính từng khúc được dùng để mô tả một số các hệ kỹ thuật, nhất là các hệ có khe hở hoặc va đập, chẳng hạn như động cơ jeffcott với ổ đỡ có khe hở [1], vết nứt do mỏi [2] hay quá trình cắt gọt kim loại [3]. Tính chất “từng khúc” khiến cho việc giải hệ phương trình vi phân của các mô hình này có điểm khác biệt so với các hệ thông thường, nói chung, việc xác định thời điểm phương trình của hệ thay đổi từ pha này sang pha khác là vấn đề quan trọng. Có một số nhóm nghiên cứu trên thế giới quan tâm đến việc giải các hệ này một cách chính xác và nhanh chóng: Xu và cộng sự [4, 5] sử dụng phương pháp cân bằng điều hòa gia lượng, Pavlovskaya và Wiercigroch [6, 7] phát triển phương pháp nửa giải tích nửa số, bản thân các tác giả đã đề ra phương pháp dùng hàm mũ ma trận kết hợp với biến giả trong các nghiên cứu trước đây [8, 9], He và cộng sự [10] cũng sử dụng hàm mũ ma trận, kết hợp với hoạch định Lemke (Lemke's scheme), để giải bài toán hệ tuyến tính từng khúc có cấu trúc tuần hoàn.

Khi đã có một công cụ tích phân số hiệu quả thì nghiệm tuần hoàn ổn định của hệ dao động có thể được tìm ra bằng cách tích phân phương trình vi phân chuyển động của hệ với các điều kiện đầu thích hợp và thời gian tích phân đủ dài. Tuy nhiên, quá trình này có thể tiêu tốn rất nhiều công sức, nhất là khi tốc độ hội tụ về nghiệm chậm. Một trong những phương pháp có thể khắc phục vấn đề này là phương pháp bắn [11]. Phương pháp bắn

cũng cần sử dụng một thuật toán tích phân số, nhưng thay vì kéo dài thời gian tích phân để đợi dao động của hệ tự hội tụ về một nghiệm tuần hoàn ổn định thì phương pháp này tập trung vào việc tìm điều kiện đầu ứng với nghiệm tuần hoàn, tức là tìm trạng thái ban đầu của hệ tại thời điểm bắt đầu một chu kỳ sao cho tại thời điểm kết thúc một hoặc một vài chu kỳ sau thì hệ lại trở lại đúng trạng thái đó. Chính vì vậy, trong nhiều trường hợp, phương pháp bắn cho kết quả chính xác và nhanh hơn việc tích phân số thông thường. Ngoài ra, phương pháp bắn có khả năng tìm ra nghiệm tuần hoàn không ổn định – việc mà phương pháp tích phân số thông thường không làm được – điều này giúp ích cho việc vẽ các sơ đồ rẽ nhánh và dự đoán tập nghiệm của hệ ở vùng tham số chưa được khảo sát.

Bài báo này giới thiệu ngắn gọn phương pháp tích phân hệ tuyến tính từng khúc bằng hàm mũ ma trận và sau đó tập trung vào việc xây dựng các công thức ứng dụng phương pháp bắn để tìm nghiệm tuần hoàn của các hệ tuyến tính từng khúc. Một ví dụ cụ thể được trình bày để minh chứng cho phương pháp được đề xuất.

2. Giải phương trình vi phân tuyến tính từng khúc chịu kích động tuần hoàn bằng hàm mũ ma trận

Xét một hệ tuyến tính từng khúc chịu kích động tuần hoàn có n biến trạng thái và w pha tuyến tính khác nhau

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (1)$$

trong đó

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_i \\ \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}_i(t) \end{cases} \quad \forall \mathbf{x} \in D_i \quad i = \overline{1, w} \quad (3)$$

Các vùng D_i tạo thành một phân hoạch (partition) của $\mathbb{R}^n$

$$D_i \cap D_j = \emptyset \quad (1 \leq i \neq j \leq w); \bigcup_{i=1}^w D_i = \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

Trong mỗi vùng, $\mathbf{A}_i$ là một ma trận vuông cấp n chứa các hằng số và $\mathbf{f}_i(t)$ là tổng của các hàm điều hòa

$$\mathbf{f}_i(t) = \mathbf{b}_i + \sum_{j=1}^m \mathbf{f}_{cij} \cos(\Omega_j t) + \sum_{j=1}^m \mathbf{f}_{sij} \sin(\Omega_j t) \quad i = \overline{1, w} \quad (5)$$

với các vector hằng số $\mathbf{b}_i$, $\mathbf{f}_{cij}$, $\mathbf{f}_{sij}$. Các tần số Ω_j thỏa mãn rằng tồn tại một chu kỳ chung nhỏ nhất T cho tất cả các thành phần điều hòa.

Bằng cách đưa vào các biến giả $\mathbf{p}$ [8, 9], (1) được viết lại như sau

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{y}(t) \quad (6)$$

với

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{p}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_i \quad \forall \mathbf{x} \in D_i \quad i = \overline{1, w} \quad (9)$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{U}_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \quad i = \overline{1, w} \quad (10)$$

$$\mathbf{U}_i = [\mathbf{f}_{ci1} \quad \dots \quad \mathbf{f}_{cim} \quad \mathbf{f}_{si1} \quad \dots \quad \mathbf{f}_{sim} \quad \mathbf{b}] \quad (11)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times m} & -\mathbf{\Omega} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{\Omega} & \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times m} & \mathbf{0}_{1 \times m} & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{\Omega} = \text{diag}(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m) \quad (13)$$

Trạng thái của nghiệm của (6) tại một thời điểm t^* nào đó có dạng

$$\mathbf{y}(t^*) = \mathbf{e}^{\mathbf{B}_{i_s}(t^* - t_s)} \left(\prod_{k=s-1}^1 \mathbf{e}^{\mathbf{B}_{i_k}(t_{k+1} - t_k)} \right) \mathbf{e}^{\mathbf{B}_{i_0} t_1} \mathbf{y}_0 \quad (14)$$

với t_k là các thời điểm chuyển pha và i_k là chỉ số của vùng ứng với pha từ thời điểm t_k trở đi

$$t^* > t_s > t_{s-1} > \dots > t_1 > t_0 = 0 \quad (15)$$

$$\mathbf{x}(t) \in D_{i_k} \quad \forall t: t_{k+1} > t \geq t_k \quad k = \overline{0, s} \quad (16)$$

$$\mathbf{x}(t) \in D_{i_s} \quad \forall t: t^* > t \geq t_s \quad (17)$$

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}(0) \quad (18)$$

3. Tìm nghiệm tuần hoàn của hệ tuyến tính từng khúc chịu kích động tuần hoàn

3.1. Phương pháp tích phân số đơn thuần và bản đồ Poincaré

Công thức (14) cho phép ta tìm được trạng thái của

hệ tại một thời điểm bất kỳ nếu biết điều kiện đầu, tức trạng thái của hệ tại thời điểm ban đầu. Để tìm nghiệm tuần hoàn của hệ, ta có thể chọn một điều kiện đầu bất kỳ nào đó và tích phân số theo công thức (14) cho đến khi thấy hệ tiến tới một nghiệm tuần hoàn. Để nhận ra một nghiệm là tuần hoàn, ta có thể sử dụng bản đồ Poincaré. Tuy nhiên, không phải khi nào ta cũng có thể thu được một nghiệm tuần hoàn theo cách này: trạng thái của hệ cũng có thể tiến tới vô cùng, tiến tới nghiệm hầu tuần hoàn hoặc nghiệm hỗn độn. Ngoài ra, với cùng một hệ, cùng một bộ tham số, các điều kiện đầu khác nhau có thể dẫn đến các nghiệm tuần hoàn khác nhau. Do đó ta có khái niệm sau: lưu vực hút của một nghiệm nào đó là tập hợp các điều kiện đầu dẫn đến nghiệm đó. Khái niệm này xuất phát từ khái niệm lưu vực hút (basin of attraction) của một tập hút, trong đó tập hợp các trạng thái của hệ ứng với một nghiệm tuần hoàn, hầu tuần hoàn hoặc hỗn độn cụ thể được coi là một tập hút.

Thuật toán cho phương pháp tích phân số đơn thuần khá đơn giản nhưng để nghiệm thu được đạt độ chính xác cao thì khối lượng tính toán sẽ rất lớn nếu có khó khăn trong quá trình tích phân và/hoặc nếu tốc độ hội tụ về nghiệm chậm. Ngoài ra, phương pháp này không thể tìm ra các nghiệm tuần hoàn không ổn định vì các nghiệm này ứng với các tập đẩy (repeller).

3.2. Phương pháp bắn

Để tìm điều kiện đầu ứng với nghiệm tuần hoàn của hệ n phương trình vi phân cấp 1

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (19)$$

với $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ là hàm tuần hoàn theo t với chu kỳ $T_{\min}$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t + T_{\min}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (20)$$

có thể giả thiết rằng ta đã biết chu kỳ T của nghiệm tuần hoàn và đi tìm $\boldsymbol{\eta}$ sao cho nếu giải (19) với điều kiện đầu

$$\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\eta} \quad (21)$$

thì sau thời gian T , trạng thái của hệ lại quay trở về đúng điều kiện đầu $\boldsymbol{\eta}$

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\eta}. \quad (22)$$

Nói cách khác, để tìm nghiệm tuần hoàn của hệ (19), ta cần giải một bài toán điều kiện biên (22), và với việc sử dụng phương pháp bắn, bài toán tương đương với việc giải một phương trình đại số phi tuyến

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0} \quad (23)$$

trong đó hàm $\mathbf{r}(\boldsymbol{\eta})$ được xác định bằng cách giải (19) với điều kiện đầu $\boldsymbol{\eta}$ và tính hiệu hai trạng thái của hệ ở hai thời điểm T và 0. Do trạng thái của hệ ở mọi thời điểm phụ thuộc vào trạng thái của hệ ở thời điểm đầu nên

ta có thể viết như sau

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{x}(T, \boldsymbol{\eta}) - \mathbf{x}(0, \boldsymbol{\eta}). \quad (24)$$

Nghiệm của (23) có thể được xác định bằng phương pháp lặp, với nghiệm dự đoán là $\boldsymbol{\eta}^{(0)}$ như sau [11]

$$\boldsymbol{\eta}^{(i+1)} = \boldsymbol{\eta}^{(i)} + \delta \boldsymbol{\eta}^{(i)} \quad (25)$$

$$\left(\frac{d\mathbf{x}}{d\boldsymbol{\eta}}(T, \boldsymbol{\eta}^{(i)}) - \mathbf{E}_n \right) \delta \boldsymbol{\eta}^{(i)} = \boldsymbol{\eta}^{(i)} - \mathbf{x}(T, \boldsymbol{\eta}^{(i)}). \quad (26)$$

Chú ý rằng, khác với tài liệu [11], ở đây ta viết $d\mathbf{x}/d\boldsymbol{\eta}$ thay vì $\partial\mathbf{x}/\partial\boldsymbol{\eta}$. Về giá trị thì hai công thức là như nhau do T trong trường hợp này là hằng số. Sở dĩ có sự thay đổi về cách viết ở đây là để tránh nhầm lẫn trong các công thức được thiết lập ở những mục sau.

a) Công thức đạo hàm đầy đủ

Ta sẽ xây dựng công thức (25) và (26) cho hệ tuyến tính từng khúc chỉ có hai pha tuyến tính khác nhau

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (27)$$

trong đó

$$\mathbf{x} \in R^n \quad (28)$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}_1(t) \end{cases} \quad \forall \mathbf{x} : \mathbf{g}'^T \mathbf{x} - b > 0 \quad (29)$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}_2(t) \end{cases} \quad \forall \mathbf{x} : \mathbf{g}'^T \mathbf{x} - b \leq 0 \quad (30)$$

$$\mathbf{f}_1(t+T) = \mathbf{f}_1(t); \quad \mathbf{f}_2(t+T) = \mathbf{f}_2(t) \quad (31)$$

với $\mathbf{g}' \in R^n$ là một vector hằng số và b là một hằng số.

Giả sử rằng hệ trên biến đổi được về dạng (6), ta cần tìm nghiệm tuần hoàn $\mathbf{y}$ chu kỳ T . Từ (14) ta có

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}(t_1) = \mathbf{e}^{\mathbf{B}_{i_0} t_1} \mathbf{y}_0 \quad (32)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}(t_{k+1}) = \mathbf{e}^{\mathbf{B}_{i_k}(t_{k+1}-t_k)} \mathbf{y}_k \quad k = \overline{1, s-1} \quad (33)$$

$$\mathbf{y}(T) = \mathbf{e}^{\mathbf{B}_{i_s}(T-t_s)} \mathbf{y}_s. \quad (34)$$

Cũng cần chú ý rằng các thời điểm chuyển pha t_k phụ thuộc vào trạng thái của hệ, nghĩa là phụ thuộc vào $\mathbf{y}_0$ do chúng phải thỏa mãn điều kiện (29) và (30)

$$j_{k+1} = j(\mathbf{y}_{k+1}) = \mathbf{g}'^T \mathbf{y}_{k+1} - b = 0 \quad k = \overline{0, s-1} \quad (35)$$

với

$$\mathbf{g}' = \begin{bmatrix} \mathbf{g}'^T & \mathbf{0}_{(2m+1) \times 1}^T \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Đạo hàm hai vế của (32), (33) và (34) theo $\mathbf{y}_0$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}_1}{d\mathbf{y}_0} &= \frac{\partial \mathbf{y}_1}{\partial \mathbf{y}_0} + \frac{\partial \mathbf{y}_1}{\partial t_1} \frac{dt_1}{d\mathbf{y}_0} = \mathbf{e}^{\mathbf{B}_{i_0} t_1} + \mathbf{B}_{i_0} \mathbf{e}^{\mathbf{B}_{i_0} t_1} \mathbf{y}_0 \frac{dt_1}{d\mathbf{y}_0} \\ &= \mathbf{e}^{\mathbf{B}_{i_0} t_1} + \mathbf{B}_{i_0} \mathbf{y}_1 \frac{dt_1}{d\mathbf{y}_0}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}_{k+1}}{d\mathbf{y}_0} &= \frac{\partial \mathbf{y}_{k+1}}{\partial \mathbf{y}_k} \frac{d\mathbf{y}_k}{d\mathbf{y}_0} + \frac{\partial \mathbf{y}_{k+1}}{\partial t_{k+1}} \frac{dt_{k+1}}{d\mathbf{y}_0} + \frac{\partial \mathbf{y}_{k+1}}{\partial t_k} \frac{dt_k}{d\mathbf{y}_0} \\ &= \mathbf{e}^{\mathbf{B}_{i_k}(t_{k+1}-t_k)} \frac{d\mathbf{y}_k}{d\mathbf{y}_0} + \mathbf{B}_{i_k} \mathbf{e}^{\mathbf{B}_{i_k}(t_{k+1}-t_k)} \mathbf{y}_k \left(\frac{dt_{k+1}}{d\mathbf{y}_0} - \frac{dt_k}{d\mathbf{y}_0} \right) \\ &= \mathbf{e}^{\mathbf{B}_{i_k}(t_{k+1}-t_k)} \frac{d\mathbf{y}_k}{d\mathbf{y}_0} + \mathbf{B}_{i_k} \mathbf{y}_{k+1} \left(\frac{dt_{k+1}}{d\mathbf{y}_0} - \frac{dt_k}{d\mathbf{y}_0} \right) \quad k = \overline{1, s-1} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}(T)}{d\mathbf{y}_0} &= \frac{\partial \mathbf{y}(T)}{\partial \mathbf{y}_s} \frac{d\mathbf{y}_s}{d\mathbf{y}_0} + \frac{\partial \mathbf{y}(T)}{\partial t_s} \frac{dt_s}{d\mathbf{y}_0} \\ &= \mathbf{e}^{\mathbf{B}_{i_s}(T-t_s)} \frac{d\mathbf{y}_s}{d\mathbf{y}_0} - \mathbf{B}_{i_s} \mathbf{e}^{\mathbf{B}_{i_s}(T-t_s)} \mathbf{y}_s \frac{dt_s}{d\mathbf{y}_0}, \end{aligned} \quad (39)$$

Đạo hàm hai vế của (35) theo $\mathbf{y}_0$, chú ý đến các công thức (37) và (38), ta được

$$\frac{dj_1}{d\mathbf{y}_0} = \frac{\partial j_1}{\partial \mathbf{y}_1} \frac{d\mathbf{y}_1}{d\mathbf{y}_0} = \mathbf{g}'^T \mathbf{e}^{\mathbf{B}_{i_0} t_1} + \mathbf{g}'^T \mathbf{B}_{i_0} \mathbf{y}_1 \frac{dt_1}{d\mathbf{y}_0} = 0, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \frac{dj_{k+1}}{d\mathbf{y}_0} &= \mathbf{g}'^T \mathbf{e}^{\mathbf{B}_{i_k}(t_{k+1}-t_k)} \frac{d\mathbf{y}_k}{d\mathbf{y}_0} \\ &+ \mathbf{g}'^T \mathbf{B}_{i_k} \mathbf{y}_{k+1} \left(\frac{dt_{k+1}}{d\mathbf{y}_0} - \frac{dt_k}{d\mathbf{y}_0} \right) = 0 \quad k = \overline{1, s-1}. \end{aligned} \quad (41)$$

Từ hai công thức trên suy ra

$$\frac{dt_1}{d\mathbf{y}_0} = -(\mathbf{g}'^T \mathbf{B}_{i_0} \mathbf{y}_1)^{-1} \mathbf{g}'^T \mathbf{e}^{\mathbf{B}_{i_0} t_1}, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{dt_{k+1}}{d\mathbf{y}_0} &= \frac{dt_k}{d\mathbf{y}_0} - (\mathbf{g}'^T \mathbf{B}_{i_k} \mathbf{y}_{k+1})^{-1} \mathbf{g}'^T \mathbf{e}^{\mathbf{B}_{i_k}(t_{k+1}-t_k)} \frac{d\mathbf{y}_k}{d\mathbf{y}_0} \\ &k = \overline{1, s-1}. \end{aligned} \quad (43)$$

Các công thức (37), (38), (39), (42) và (43) cho ta công thức truy hồi để tính $d\mathbf{y}(T)/d\mathbf{y}_0$ một cách đầy đủ. Để ý rằng $2m+1$ phần tử cuối của $\mathbf{y}$ là các biến giả, do đó ta không cần thay đổi chúng khi đi tìm điều kiện đầu ứng với nghiệm tuần hoàn. Như vậy, $d\mathbf{x}(T, \boldsymbol{\eta})/d\boldsymbol{\eta}$ chính là ma trận con cỡ n nằm trong n hàng và n cột đầu tiên của $d\mathbf{y}(T)/d\mathbf{y}_0$. Cuối cùng, ta đã có đủ công thức để xây dựng biểu thức lặp (25) và (26).

b) Công thức đạo hàm rút gọn

Nếu ở lân cận nghiệm tuần hoàn cần tìm, ảnh hưởng của điều kiện đầu đến các thời điểm chuyển pha là nhỏ thì các công thức (37), (38) và (39) có thể được viết lại như sau

$$\frac{d\mathbf{y}_1}{d\mathbf{y}_0} \approx \mathbf{e}^{\mathbf{B}_{i_0} t_1}, \quad (44)$$

$$\frac{dy_{k+1}}{dy_0} \approx e^{B_k(t_{k+1}-t_k)} \frac{dy_k}{dy_0} \quad k = \overline{1, s-1}, \quad (45)$$

$$\frac{dy(T)}{dy_0} \approx e^{B_{t_s}(T-t_s)} \frac{dy_s}{dy_0} = e^{B_{t_s}(T-t_s)} \prod_{k=s}^1 e^{B_{t_{k-1}}(t_k-t_{k-1})}. \quad (46)$$

Loại bỏ các biến giả, ta có

$$\frac{dx(T, \eta)}{d\eta} \approx e^{A_{t_s}(T-t_s)} \prod_{k=s}^1 e^{A_{t_{k-1}}(t_k-t_{k-1})}. \quad (47)$$

Thực tế tính toán cho thấy, nếu ban đầu ta đã đoán nghiệm tương đối chính xác, việc sử dụng công thức đạo hàm rút gọn (47) cho phép lặp (25) và (26) vẫn cho độ hội tụ nhanh và kết quả có độ chính xác rất cao mà việc lặp trình lại đơn giản hơn công thức đạo hàm đầy đủ. Các kết quả được trình bày ở bài báo này đều sử dụng công thức đạo hàm rút gọn.

4. Nghiệm tuần hoàn và lưu vực hút của một hệ tuyến tính từng khúc bất đối xứng một bậc tự do

Xét hệ sau

$$\dot{x}(t) = A(x)x + f_s \sin \Omega t + b(x) \quad (48)$$

với

$$x \in R^2, \quad (49)$$

$$f_s = \begin{bmatrix} 0 \\ f_0 \end{bmatrix}, \quad (50)$$

$$A(x) = A_1; \quad b(x) = b_1 \quad \forall x: [1 \ 0]x + d > 0, \quad (51)$$

$$A(x) = A_2; \quad b(x) = b_2 \quad \forall x: [1 \ 0]x + d \leq 0, \quad (52)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k_0 - k_1}{m} & \frac{-c_0 - c_1}{m} \end{bmatrix}, \quad (53)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k_0}{m} & \frac{-c_0}{m} \end{bmatrix}, \quad (54)$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (55)$$

$$b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_1 d}{m} \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Các tham số được lấy như sau

$$f_0 = 7,8 \times 10^3 \text{ N}; \quad m = 0,4 \times 10^3 \text{ kg};$$

$$k_1 = 0,9 \times 10^6 \text{ N/m}; \quad k_0 = 32,5 \times 10^3 \text{ N/m};$$

$$c_0 = 0,05 \times 10^3 \text{ Ns/m}; \quad c_1 = 0,5 \times 10^3 \text{ Ns/m};$$

$$d = 5 \times 10^{-3} \text{ m}; \quad \Omega = 34,56 \text{ rad/s}.$$

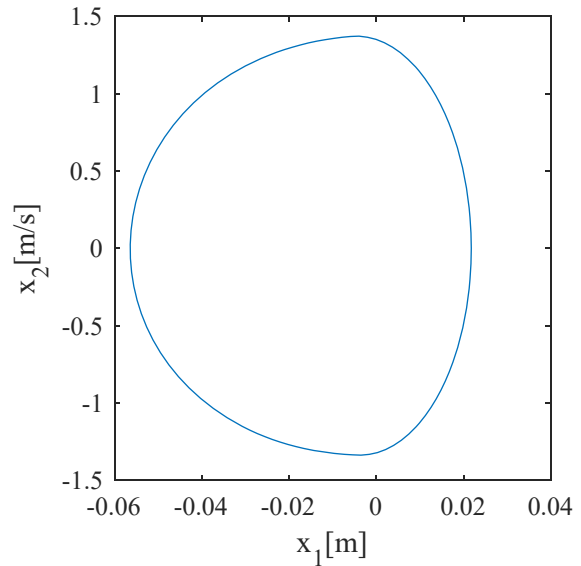
Hệ trên đã được khảo sát từ lâu bằng phương pháp cân bằng điều hòa gia lượng [5] và bằng phương pháp

bắn với tích phân số thông thường [11]. Tuy nhiên, các nghiên cứu sau đó chỉ ra rằng sử dụng hàm mũ ma trận với các biến giả làm tăng độ chính xác của quá trình tích phân cũng như làm tăng tốc độ tính toán, nhờ thế mà số lượng nghiệm được tìm ra tăng lên rất nhiều [8, 9].

Trước hết, phương pháp ánh xạ ô đơn giản được sử dụng để xác định những trạng thái của hệ có thể gần với điều kiện đầu của nghiệm tuần hoàn. Sau đó, phương pháp bắn được sử dụng để tìm các nghiệm tuần hoàn từ những trạng thái này một cách đầy đủ nhất có thể. Cuối cùng, bản đồ Poincaré được dùng, kết hợp với kết quả của phương pháp ánh xạ ô để vẽ ra lưu vực hút của các nghiệm tuần hoàn đã tìm được.

Trong quá trình trên, rất nhiều bước tính toán được lặp đi lặp lại mà không ảnh hưởng đến nhau, như khi sử dụng phương pháp ánh xạ ô, khi sử dụng phương pháp bắn với các điều kiện đầu dự đoán khác nhau và khi tích phân số với các điều kiện đầu khác nhau. Tận dụng những công nghệ mới trong cấu trúc máy tính, lập trình song song được sử dụng tại các bước đó để tăng tốc độ tính toán. Do giới hạn không gian của bài báo, phương pháp ánh xạ ô và kỹ thuật lập trình song song không được trình bày kỹ ở đây.

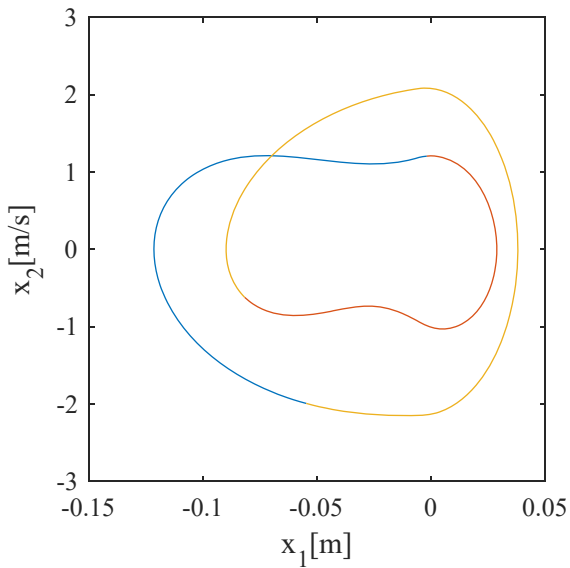
Ta tìm được tổng cộng năm nghiệm tuần hoàn ổn định của hệ đã cho: trên hình 1 là quỹ đạo pha của nghiệm 1 chu kỳ, hình 2 là nghiệm 3 chu kỳ thứ nhất, hình 3 là nghiệm 3 chu kỳ thứ hai, hình 4 là nghiệm 9 chu kỳ có tính chất khá giống với nghiệm 3 chu kỳ thứ hai và hình 5 là nghiệm 2 chu kỳ.



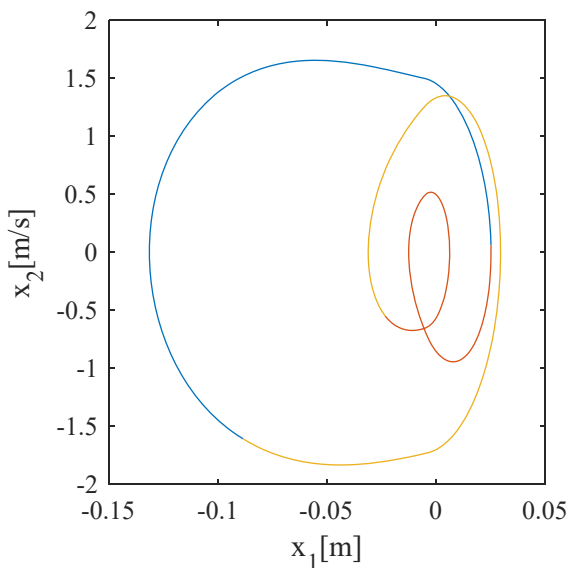
Hình 1. Quỹ đạo pha của nghiệm một chu kỳ

Lưu vực hút của các nghiệm tuần hoàn thu được nhờ phương pháp ánh xạ ô được cho trên hình 6. Tổng cộng có 15608901 ô trên hình ảnh lưu vực hút này (6501x2401). Hình 7 cho hình ảnh cận cảnh của vùng trung tâm của hình 6. Có thể thấy rằng ở khu vực trung tâm thì lưu vực hút của nghiệm 2 chu kỳ rất nhỏ nhưng khi ra xa khỏi trung tâm thì lưu vực hút của nghiệm này lại có diện tích áp đảo. Lưu vực hút của nghiệm 3 chu kỳ thứ nhất nằm “xung quanh” lưu vực hút của nghiệm của

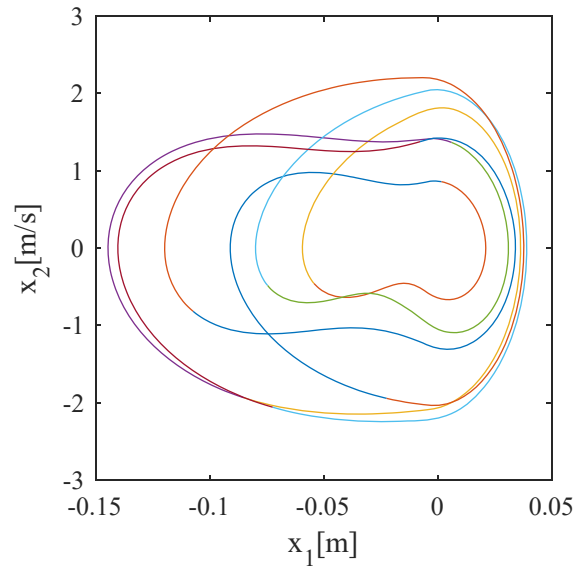
nghiệm 1 chu kỳ còn lưu vực hút của nghiệm 9 chu kỳ ở “xung quanh” lưu vực hút của nghiệm 3 chu kỳ thứ hai và chúng thể hiện tính chất “fractal” – các lưu vực xen lẫn nhau, rất khó để xác định được đường ranh giới.



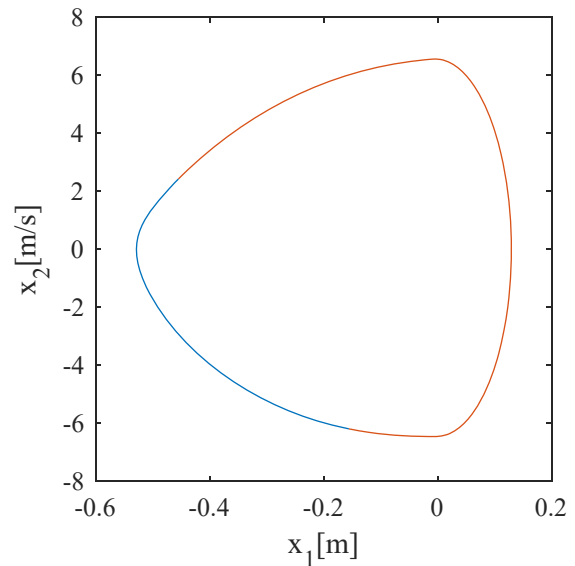
Hình 2. Quỹ đạo pha của nghiệm 3 chu kỳ thứ nhất



Hình 3. Quỹ đạo pha của nghiệm 3 chu kỳ thứ hai

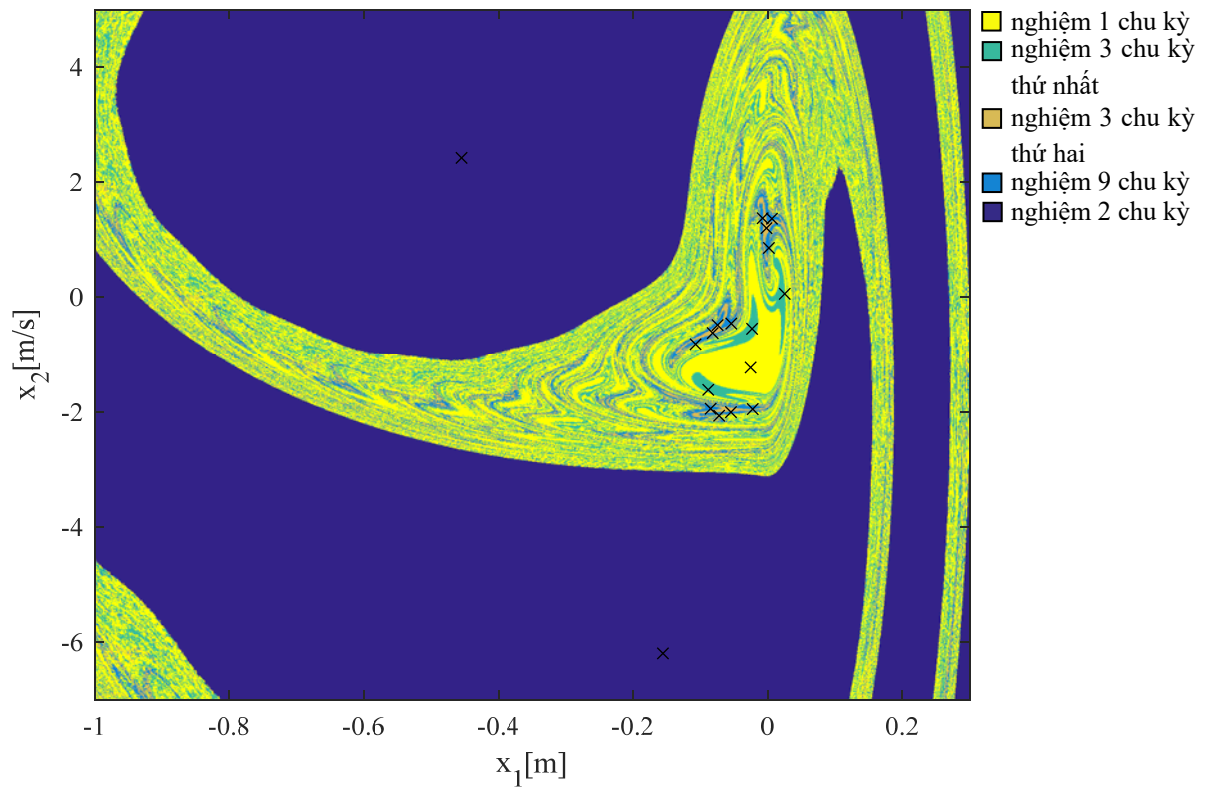


Hình 4. Quỹ đạo pha của nghiệm 9 chu kỳ

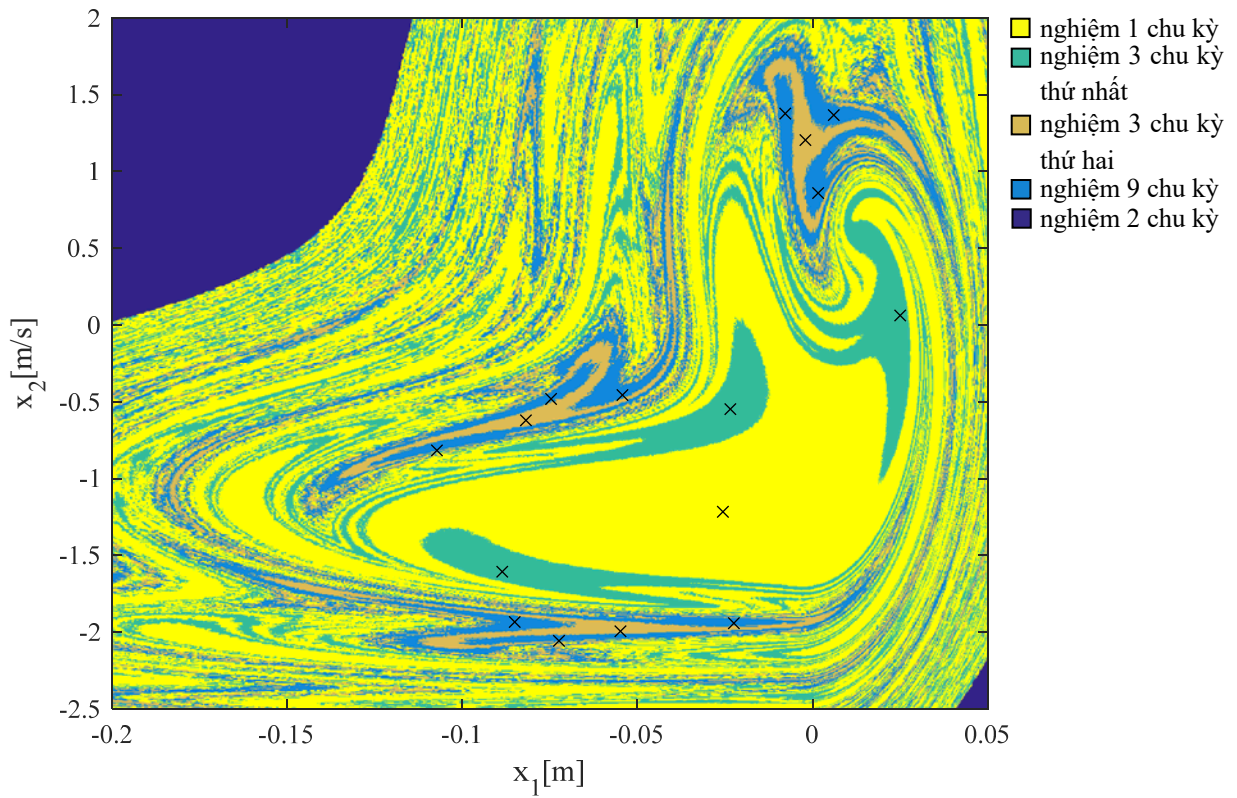


Hình 5. Quỹ đạo pha của nghiệm 2 chu kỳ

Toàn bộ kết quả tính toán trên được thực hiện trên một máy tính cá nhân có cấu hình trung bình thấp ở thời điểm viết bài với tổng thời gian chạy máy không quá một ngày.



Hình 6. Lưu vực hút của các nghiệm tuần hoàn.
Các dấu “x” ứng với bản đồ Poincaré của các nghiệm tuần hoàn.



Hình 7. Lưu vực hút của các nghiệm tuần hoàn, phóng to vùng trung tâm.
Các dấu “x” ứng với bản đồ Poincaré của các nghiệm tuần hoàn.

5. Kết luận

Bài báo đã trình bày phương pháp bắn tìm nghiệm tuần hoàn của hệ tuyến tính từng khúc, trong đó có sử dụng đến hàm mũ ma trận. Để có thể áp dụng hàm mũ ma trận một cách có hiệu quả, phương pháp đưa vào biến giả do các tác giả đề ra ở các nghiên cứu trước tiếp tục được sử dụng. Hai công thức áp dụng phương pháp bắn đã được thiết lập: công thức đạo hàm đầy đủ, trong đó có kể đến ảnh hưởng của điều kiện đầu đến các thời điểm chuyển pha, và công thức đạo hàm rút gọn, trong đó không kể đến ảnh hưởng của điều kiện đầu đến các thời điểm chuyển pha. Thực tế cho thấy cả hai công thức này đều có hiệu quả và công thức đạo hàm rút gọn được ưu tiên sử dụng trong nghiên cứu này vì sự đơn giản của nó.

Một ví dụ tính toán cho một hệ tuyến tính từng khúc bất đối xứng một hệ tự do đã được trình bày. Với cùng một bộ tham số, năm nghiệm tuần hoàn ổn định khác nhau đã được tìm ra. Lưu vực hút của các nghiệm này được vẽ ra nhờ sự kết hợp của phương pháp ánh xạ ô, bản đồ Poincaré và phương pháp bắn. Các kết quả thu được vượt trội so với các nghiên cứu sử dụng các phương pháp khác.

Bản đồ lưu vực hút có hơn 15 triệu ô, đòi hỏi khối lượng tính toán rất lớn. Việc toàn bộ tính toán này được thực hiện trên một hệ máy tính cá nhân giá rẻ với thời gian chạy máy chấp nhận được đã chứng tỏ các thuật toán được sử dụng có tốc độ và hiệu quả cao. Kỹ thuật tính toán song song cũng góp phần tăng tốc quá trình tính toán.

Phương pháp ánh xạ ô và kỹ thuật lập trình song song sẽ được trình bày trong các nghiên cứu sau này.

harmonic balance method. Journal of sound and vibration, 264(4), 873-882, 2003.

- [6] Pavlovskaja, E., & Wiercigroch, M., *Periodic solution finder for an impact oscillator with a drift*. Journal of Sound and Vibration, 267(4), 893-911, 2003.
- [7] Pavlovskaja, E., & Wiercigroch, M., *Analytical drift reconstruction for visco-elastic impact oscillators operating in periodic and chaotic regimes*. Chaos, Solitons & Fractals, 19(1), 151-161, 2004.
- [8] Nguyễn Văn Khang, & Nguyễn Thái Minh Tuấn, *Về một thuật toán mới phân tích dao động của hệ động lực tuyến tính từng khúc*. Tuyển tập Hội nghị Cơ học kỹ thuật toàn quốc Kỷ niệm 35 năm thành lập Viện Cơ học, Tập 1, 527-532, Hà Nội, Việt Nam, 2014.
- [9] Tuan, N. T. M., & Khang, N. V., *Calculating periodic and chaotic vibrations of piecewise-linear systems using matrix exponential approach*. Proceeding of International Conference on Engineering Mechanics and Automation (ICEMA 3), Hanoi, Vietnam, 2014.
- [10] He, D., Gao, Q., & Zhong, W., *An efficient method for simulating the dynamic behavior of periodic structures with piecewise linearity*. Nonlinear Dynamics, 94(3), 2059-2075, 2018.
- [11] Khang, N. V., Cuong, H. M., & Tuan, N. T. M., *Calculation of nonlinear vibrations of piecewise-linear systems using the shooting method*. Vietnam Journal of Mechanics, 34(3), 157-167, 2012.

Tài liệu tham khảo

- [1] Karpenko, E. V., Wiercigroch, M., Pavlovskaja, E. E., & Cartmell, M. P., *Piecewise approximate analytical solutions for a Jeffcott rotor with a snubber ring*. International Journal of Mechanical Sciences, 44(3), 475-488, 2002.
- [2] Foong, C. H., Pavlovskaja, E., Wiercigroch, M., & Deans, W. F., *Chaos caused by fatigue crack growth*. Chaos, Solitons & Fractals, 16(5), 651-659, 2003.
- [3] Wiercigroch, M., & Budak, E., *Sources of nonlinearities, chatter generation and suppression in metal cutting*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 359(1781), 663-693, 2001.
- [4] Xu, L., Lu, M. W., & Cao, Q., *Nonlinear vibrations of dynamical systems with a general form of piecewise-linear viscous damping by incremental harmonic balance method*. Physics Letters A, 301(1-2), 65-73, 2002.
- [5] Xu, L., Lu, M. W., & Cao, Q., *Bifurcation and chaos of a harmonically excited oscillator with both stiffness and viscous damping piecewise linearities by incremental*